Esercizi sull'equazione della circonferenza

Data l'equazione disegna la circonferenza (se esiste)

a) $3x^2+3y^2+x+y+3=0$

dividendo per 3 si ottiene l'equazione nella forma standard:

$$x^2+y^2+\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+1=0$$

da cui si possono ricavare le coordinate del centro e il raggio:

$$x_c=-\frac{1}{6}, \quad y_c=-\frac{1}{6}$$

$$r=\sqrt{x_c^2+y_c^2-c}=\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}-1}$$ (non è un numero reale)

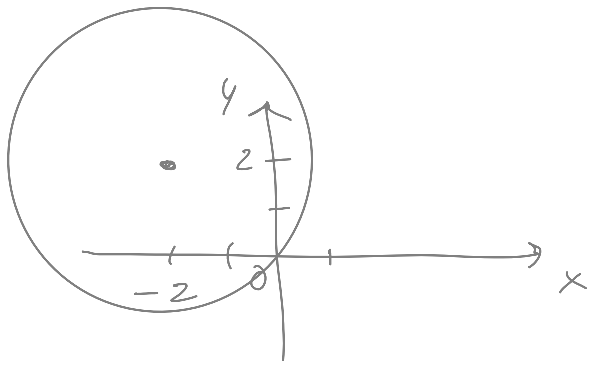
L'equazione data non corrisponde quindi ad alcuna circonferenza.

b) $x^2+y^2+4x-4y=0$

Le coordinate del centro e il raggio sono:

$x_c = -2, \quad y_c = 2, \quad r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

Il grafico è:

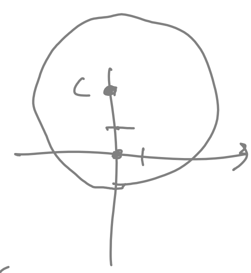


Si vede che la circonferenza passa per l'origine (infatti $c = 0$).

Stabilisci se un punto è interno, esterno o appartenente a una circonferenza

$x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$, punti $O(0,0)$, $A(3,2)$, $B(1,5)$, $D(-3,0)$, $E(1,1)$, $F(\sqrt{5},4)$

$x_c = 0, \quad y_c = 2, \quad C(0,2), \quad r = \sqrt{4+5} = 3$



Il punto O è interno

$A(3,2), \quad \overline{AC} = \sqrt{9} = 3$ (A è appartenente)

$B(1,5)$, $C(0,2)$, $r=3$

$\overline{BC} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} > 3$ (B è esterno)

$D(-3,0)$, $C(0,2)$, $r=3$

$\overline{DC} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} > 3$ (D è esterno)

$E(1,1)$, $\overline{EC} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} < 3$ (E è interno)

$F(\sqrt{5},4)$, $\overline{FC} = \sqrt{5+4} = 3$ (F appartiene alla circ.)

Determina l'equazione della circonferenza assegnate particolari condizioni

1) Passante per i 3 punti $(3,2)$, $(5,0)$, $(2,\sqrt{3})$

$$\begin{cases} 9+4+3a+2b+c=0 \\ 25+5a+c=0 \\ 4+3+2a+\sqrt{3}\,b+c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 13+3a+2b+c=0 \\ 25+5a+c=0 \\ 7+2a+\sqrt{3}\,b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13+3a+2b-25-5a=0 \\ c=-25-5a \\ 7+2a+\sqrt{3}\,b-25-5a=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -12-2a+2b=0 \\ c=-25-5a \\ -18-3a+\sqrt{3}\,b=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -6+b \\ c = -25-5a \\ -18-3(-6+b)+\sqrt{3}\,b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -6+b \\ c = -25-5a \\ -\cancel{18}+\cancel{18}-3b+\sqrt{3}\,b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -6+b \\ c = -25-5a \\ b(\sqrt{3}-3) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ c = -25+30 = 5 \\ b = 0 \end{cases}$$

L'equazione è: $x^2+y^2-6x+5=0$

2) Centro su una retta data $(y=x+1)$ e passante per due punti $((3,2),(1,0))$

Il centro ha coordinate $C(x_c, x_c+1)$

cioè $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}+1\right)$

La distanza del centro dai due punti è la stessa (uguale al raggio):

$$\sqrt{\left(3+\frac{a}{2}\right)^2+\left(2+\frac{a}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\left(1+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-1\right)^2}$$

Da questa equazione si può ricavare a:

$$\left(3+\frac{a}{2}\right)^2+\cancel{\left(1+\frac{a}{2}\right)^2} = \cancel{\left(1+\frac{a}{2}\right)^2}+\left(\frac{a}{2}-1\right)^2$$

$$9+\cancel{\frac{a^2}{4}}+3a = \cancel{\frac{a^2}{4}}-a+1, \quad 4a=-8, \quad a=-2$$

L'equazione della circonferenza è allora:

$$x^2+y^2-2x+by+c=0$$

contiene i parametri b e c che si possono determinare con l'appartenenza dei 2 punti dati alla circonferenza:

$$\begin{cases} 9+4-6+2b+c=0 \\ 1-2+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 7+2b+1=0 \\ c=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b=-8 \\ c=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-4 \\ c=1 \end{cases}$$

3) Concentrica alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-6x+2y+9=0$ e passante per $P(1,1)$.

Il centro della circonferenza di eq. $x^2+y^2-6x+2y+9=0$ è $C(3,-1)$.

Quindi una circonferenza concentrica deve avere equazione $x^2+y^2-6x+2y+c=0$ (stessi a e b)

Per trovare c si usa il passaggio per il punto $(1,1)$:

$$1+1-6+2+c=0 \implies c=2$$

L'eq. quindi è: $x^2+y^2-6x+2y+2=0$

Posizioni reciproche di una retta e una circonferenza

4) Trova gli eventuali punti di intersezione tra la retta di equazione $x-2y+2=0$ e la circonferenza di equazione $x^2+y^2=4$.

a) $\begin{cases} x-2y+2=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2y-2 \\ (2y-2)^2+y^2=4 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2y-2 \\ 4y^2-8y+4+y^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2y-2 \\ 5y^2-8y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2y-2 \\ y=0,\ y=\frac{8}{5} \end{cases}$ La retta è secante nei punti $(-2,0)$, $\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$.

Tangenti ad una circonferenza passanti per un punto P

5) $5x^2+5y^2-10x-10y+1=0$, $P(-2,-2)$

$x^2+y^2-2x-2y+\frac{1}{5}=0$

$C(1,1)$, $r=\sqrt{1+1-\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

$\overline{PC}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}>r$ (P è esterno)

Il fascio di rette per P ha equazione $y+2=m(x+2)$, $y+2-m(x+2)=0$

La distanza delle rette del fascio dal centro è uguale al raggio:

$$\frac{|1+2-m(1+2)|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$|3-3m|=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{1+m^2}$$

$$\cancel{3}\,|1-m|=\frac{\cancel{3}}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{1+m^2}$$

$$(1-m)^2=\frac{1+m^2}{5}, \quad 1+m^2-2m=\frac{1+m^2}{5}$$

$$5+5m^2-10m=1+m^2$$

$$4m^2-10m+4=0, \quad 2m^2-5m+2=0$$

$$m=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}=\begin{cases}2\\ \frac{1}{2}\end{cases}$$

Le rette tangenti hanno equazioni:

$y+2=m(x+2)$ quindi con

$$m=2 \Longrightarrow y+2=2(x+2)$$
$$y=2x+2$$

$$m=\frac{1}{2} \Longrightarrow y+2=\frac{1}{2}(x+2)$$
$$y=\frac{1}{2}x-1$$

Posizioni reciproche di 2 circonferenze

6) Trovare le eventuali intersezioni delle due circonferenze

$$x^2+y^2+4x-2y-5=0$$
$$x^2+y^2+6x-8y+5=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x-2y-5=0 \\ 2x-6y+10=0 \quad (\text{asse radicale}) \end{cases}$$

9

$$\begin{cases} (3y-5)^2+y^2+4(3y-5)-2y-5=0 \\ x=3y-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2+25-30y+y^2+12y-20-2y-5=0 \\ x=3y-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10y^2-20y=0 \\ x=3y-5 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0,\ y=2 \\ x=3y-5 \end{cases}$$

Le circonferenze sono secanti nei punti $(-5,0)$ e $(1,2)$.

In effetti centri e raggi sono:

$C_1(-2,1)$, $r_1=\sqrt{4+1+5}=\sqrt{10}\simeq 3,1$

$C_2(-3,4)$, $r_2=\sqrt{9+16}=5$

e la distanza tra i centri è

$\overline{C_1C_2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$, quindi

$1,9\simeq |r_1-r_2|<\overline{C_1C_2}<r_1+r_2\simeq 8,1$